Mateusz Bartnicki, grupa nr 3 środa 16:45-18:15

Metody obliczeniowe w nauce i technice – 24.04.2024 r.

**Interpolacja i aproksymacja - podsumowanie**

**1. Opracowana funkcja**

Obraz zawierający Wykres, diagram, linia, tekst

Opis wygenerowany automatycznieDla k = 1, m = 10 oraz x [-7, 7].

Rysunek 1 – wykres funkcji f(x)

Zadana funkcja jest symetryczna względem osi OY, ma 13 ekstremów lokalnych (równomiernie rozmieszczonych, w tym jedno dokładnie na osi OY) oraz 6 miejsc zerowych.

**2. Dane techniczne**

Program został napisany przy użyciu języka Python (3.10.12) z wykorzystaniem bibliotek numpy oraz matplotlib. Ćwiczenie zostało wykonane na WSL (Windows Subsystem for Linux) - Ubuntu 22.04.3 LTS na procesorze Intel Core i5-11400H 2.70GHz.

**3. Porównywane zagadnienia**

W tym ćwiczeniu porównywane były interpolacje przeprowadzona na 5 różnych sposobów: korzystając z metody Lagrange’a oraz metody Newtona w zagadnieniu Lagrange’a, w zagadnieniu Hermite’a, z wykorzystaniem funkcji sklejanych 2 stopnia i z wykorzystaniem funkcji sklejanych 3 stopnia.

Oprócz tego, zestawione są do tego dwie aproksymacje: wielomianami algebraicznymi oraz funkcjami trygonometrycznymi.

W poniższych wzorach n oznacza stopień otrzymanego wielomianu, a w(x) jest otrzymywanym wielomianem interpolacyjnym.

**3.1 Zagadnienie Lagrange’a – metoda Lagrange’a**

**3.2 Zagadnienie Lagrange’a – metoda Newtona**

**3.3 Zagadnienie Hermite’a**

W przypadku zagadnienia Hermite’a, wielomian inteprolacyjny obliczany był na podstawie wzoru Newtona. W mojej implementacji używana była tylko pochodna pierwszego rzędu, a więc otrzymywany wielomian interpolacyjny był stopnia (2 \* liczba węzłów – 1).

**3.4 Funkcje sklejane 2 stopnia**

Aby znaleźć współczynniki a, b, c wielomianów Si pomiędzy punktami, rozwiązałem równanie postaci A\*x = B.

Poniżej przedstawiam wygląd macierzy A, x i B w przykładzie dla zadanych 4 punktów   
[(x1, y1), (x2, y2), (x3, y3), (x4, y4)]. Otrzymujemy dla nich 3 wielomiany Si Parametr ***z*** w macierzy oznacza dobrany przez nas warunek brzegowy. W mojej implementacji, pierwszym przyjętym parametrem ***z*** było 0 - przyjąłem warunek S(x1)’’ = 0. Jako drugi warunek brzegowy przyjąłem S(x1)’’ = f1’ (pochodna z funkcji, w moim programie obliczany jako iloraz różnicowy). W tym przypadku ***z*** był podwojoną wartością obliczonej pochodnej w punkcie.

X =

**3.4 Funkcje sklejane 3 stopnia**

Aby znaleźć współczynniki wielomianów trzeciego stopnia Si pomiędzy punktami, podobnie jak poprzednio, rozwiązałem równanie postaci A\*x = B.

To zadanie również rozwiązałem na dwa sposoby, z dwoma różnymi warunkami brzegowymi. Pierwszym przyjętym warunkiem brzegowym warunek S(x1)’’ = S(xn)’’ = 0 (dalej nazywany jako natural). Jako drugi warunek brzegowy przyjąłem S(x1)’ = f1’ oraz S(xn)’ = fn’.

W przypadku pierwszego warunku brzegowego, macierze A, x i B miały postacie:

X =

W przypadku drugiego warunku brzegowego, macierze A, x i B miały postacie:

X =

Wyjaśnienie symboli:

– iloraz różnicowy, gdzie xi są danymi współrzędnymi x zadanych punktów, natomiast yi są wartościami im odpowiadającymi.

Ostatecznie wielomian S otrzymuję, korzystając ze wzoru:

**3.5 Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi**

Mając dane:

* (xi, yi = F(xi)), i = 0, 1, …, n, czyli (n+1) węzłów
* Układ funkcji bazowych (m oznacza również stopień otrzymanego wielomianu aproksymacyjnego)

Szukamy wielomianu uogólnionego:

W tym celu, szukamy współczynników a spełniających warunek:

Aby je znaleźć, rozwiązujemy równanie postaci A\*x = B, które wygląda następująco:

X =

Zakres sum: i = 0, 1, …, n

**3.6 Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami trygonometrycznymi**

Układ funkcji bazowych:

(m oznacza również stopień otrzymanego wielomianu aproksymacyjnego)

Szukamy wielomianu trygonometrycznego o okresie 2 π:

W tym celu, szukamy współczynników a i b spełniających warunek:

Co prowadzi do zależności:

, x’ to nowa wartość w przedziale [-π, π], a x to wartość w pierwotnym przedziale [a, b]. Transformację tę stosujemy, aby przekształcić przedział funkcji [-7, 7] na przedział [-π, π].

**4. Interpolacja, a aproksymacja**

Interpolacja polega na wyznaczeniu funkcji przechodzącej przez wszystkie węzły. Aproksymacja natomiast polega na wyznaczeniu funkcji, która najlepiej odpowiadaj zadanym węzłom, poprzez minimalizacje błędu pomiędzy wyznaczoną funkcją a zadanymi danymi. Z tego powodu, w aproksymacji wyznaczona funkcja nie zawsze przechodzi przez węzły, ale w zamian za to odwzorowuje ona ogólne zachowanie funkcji.

**5. Dokładność przybliżenia wyznaczonej funkcji względem funkcji zadanej**

W celu oszacowania dokładności przybliżenia wyznaczonej funkcji względem funkcji zadanej, wykorzystałem dwa wskaźniki:

1. Maksymalna różnica pomiędzy wartością zadanej funkcji oraz wyznaczonego wielomianu:
2. Suma kwadratów różnic między wartościami zadanej funkcji oraz wyznaczonego wielomianu:

N - liczba punktów, w których obliczana jest wartość funkcji

**6. Porównanie różnych sposobów interpolacji**

Wszystkie wartości były obliczane dla 1000 punktów (N = 1000).

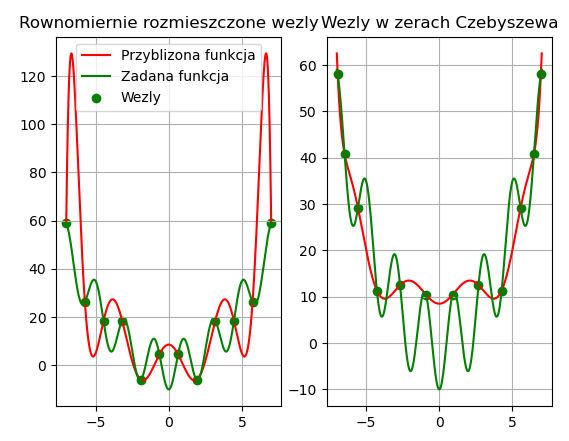
**6.1 Zagadnienie Lagrange’a**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Stopień wielomianu | Metoda Lagrange’a | | Metoda Newtona | |
| Maksymalny błąd bezwzględny | Suma kwadratów różnic | Maksymalny błąd bezwzględny | Suma kwadratów różnic |
| 3 | 16.53 | 18850 | 16.53 | 18850 |
| 9 | 19.96 | 9640 | 19.96 | 9640 |
| 19 | 4460 | 42646841 | 4460 | 42646841 |
| 29 | 327.215 | 91822 | 327.215 | 91822 |
| 39 | 0.258 | 0.0306 | 0.258 | 0.0306 |
| 49 | 0.0032 | 9.964e-07 | 0.0046 | 2.578e-06 |
| 59 | 3.257 | 0.525 | 0.2175 | 0.007265 |
| 69 | 1867 | 197519 | 356 | 14973 |
| 79 | 1622903 | 1.043e+11 | 132068 | 1.25e+9 |

Tabela 1 – wartości błędów przy interpolacji w zagadnieniu Lagrange’a dla węzłów równomiernie rozmieszczonych

Na powyższym zestawieniu widzimy, że początkowo metody Lagrange’a i Newtona w zagadnieniu Lagrange’a niczym się od siebie nie różnią. Pierwsze marginalne różnice w ich błędach widzimy dla wielomianu stopnia 49, gdzie w tym zestawieniu jest tam również największa dokładność przybliżenia (najmniejsza suma kwadratów różnic). Dla kolejnego zwiększania stopnia wielomianu, zaczynają występować błędy numeryczne i nasze przybliżenie przestaje być dobre.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Stopień wielomianu | Metoda Lagrange’a | | Metoda Newtona | |
| Maksymalny błąd bezwzględny | Suma kwadratów różnic | Maksymalny błąd bezwzględny | Suma kwadratów różnic |
| 3 | 16.64 | 17825 | 16.64 | 17825 |
| 9 | 21.94 | 11207 | 21.94 | 11207 |
| 19 | 14.987 | 1796 | 14.987 | 1796 |
| 29 | 0.0272 | 0.00825 | 0.0272 | 0.00825 |
| 39 | 5.998e-07 | 3.652e-12 | 0.0016 | 4.377e-07 |
| 49 | 7.407e-13 | 4.774e-24 | 0.0282 | 0.0001383 |
| 59 | 8.526e-14 | 5.072e-27 | 0.1778 | 0.002801 |
| 69 | 1.776e-13 | 6.45e-27 | 370 | 13072 |
| 79 | 1.421e-13 | 4.889e-27 | 53732562 | 1,66e+14 |

Podobnie jak w przypadku równomiernie rozmieszczonych węzłów, na początku metody nie różnią się od siebie, tutaj jednak pierwsze różnice widoczne są już wcześniej, gdyż dla 39 stopnia wielomianu. W przypadku metody Newtona, również występują błędy numeryczne dla większych stopni wielomianu i są one znacznie większe niż dla równomiernie rozmieszczonych węzłów, natomiast w przypadku metody Lagrange’a, interpolacja jest o wiele dokładniejsza, nawet dla dużych stopni wielomianu.

Rysunek 2 – interpolacja w zagadnieniu Lagrange’a dla 11 stopnia wielomianu

Tabela 2 – wartości błędów przy interpolacji w zagadnieniu Lagrange’a dla węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa

Na rysunku 2 widać wpływ sposobu doboru węzłów – przy doborze węzłów w zerach Czebyszewa eliminowany jest efekt Rungego, który występuje pierwszy raz dla 12 węzłów.

Obraz zawierający tekst, diagram, Wykres, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, diagram, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznieW przypadku metody Lagrange’a, zastosowanie węzłów w zerach Czebyszewa nie tylko eliminuje efekt Rungego, ale również znacznie zwiększa dokładność interpolacji. W przypadku metody Newtona natomiast, otrzymujemy nieco inny efekt – błędy numeryczne na krańcach przedziału są większe.

Rysunek 3 – interpolacja metodą Newtona dla 68 stopnia wielomianu

Rysunek 2 – interpolacja metodą Lagrange’a dla 69 stopnia wielomianu

**Wnioski:**

* Zastosowanie węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa eliminuje problem występowania efektu Rungego
* Zastosowanie węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa zwiększa dokładność w przypadku metody Lagrange’a, jednak zwiększa również błędy numeryczne w przypadku metody Newtona
* Zwiększanie liczby węzłów do pewnego momentu zwiększa dokładność, aż w końcu zaczynają występować błędy numeryczne i otrzymywany jest odwrotny efekt

**6.2 Zagadnienie Hermite’a**

Tabela 3 – wartości błędów przy interpolacji w zagadnieniu Hermite’a

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Liczba węzłów | Węzły równomiernie rozmieszczone | | Węzły w zerach Czebyszewa | |
| Maksymalny błąd bezwzględny | Suma kwadratów różnic | Maksymalny błąd bezwzględny | Suma kwadratów różnic |
| 2 | 20 | 74925 | 25.797 | 67384 |
| 3 | 19.203 | 33022 | 23.866 | 62405 |
| 5 | 61.583 | 137553 | 29.156 | 39194 |
| 10 | 1307.889 | 12607362 | 29.977 | 10780 |
| 15 | 90.496 | 23473 | 0.0539 | 0.0494 |
| 20 | 0.061 | 0.0055 | 0.002 | 1.112e-06 |
| 25 | 0.00601 | 6.628e-06 | 0.0246 | 0.000165 |
| 30 | 0.0375 | 0.00018 | 0.182 | 0.00689 |
| 35 | 8.597 | 21.837 | 25.850 | 42.375 |
| 40 | 101648 | 569193998 | 4418564 | 1501861354398 |

Obraz zawierający tekst, Wykres, diagram, linia

Opis wygenerowany automatycznieNa powyższym zestawieniu błędów można dostrzec, że interpolacja wielomianu z węzłami umieszczonymi w zerach Czebyszewa początkowo ma stałe wartości błędów (i mniejsze niż w przypadku węzłów równomiernie rozmieszczonych z wyjątkiem 3 węzlów), jednakże przy większej liczbie węzłów również szybciej zaczynają występować błędy numeryczne. Wynika to z faktu, że implementacja oparta była na metodzie Newtona, gdzie efekt był identyczny.

Rysunek 4 – Interpolacja w zagadnieniu Hermite’a dla 7 węzłów

W przypadku interpolacji w zagadnieniu Hermite’a, pierwszy efekt Rungego występuje już dla 7 węzłów (13 stopnia wielomianu), a więc dla nieco większego stopnia niż w przypadku zagadnienia Lagrange’a.

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatyczniePierwsze błędy numeryczne dostrzegalne są dla 35 węzłów, a więc dla dużo mniejszej liczby niż w przypadku zagadnienia Lagrange’a, i podobnie jak w przypadku metody Newtona, są większe dla węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa.

Rysunek 5 – Interpolacja w zagadnieniu Hermite’a dla 35 węzłów

**Wnioski:**

* Węzły umieszczone w zerach Czebyszewa eliminują efekt Rungego i początkowo polepszają przybliżenie, jednak błędy numeryczne dla większych stopni wielomianu również są większe niż dla równomiernie rozmieszczonych węzłów
* Ze względu na większą ilość informacji (dodatkowo znane są pochodne), lepsze przybliżenia są uzyskiwane dla mniejszej liczby węzłów (w porównaniu do zagadnienia Lagrange’a)

**Wnioski dla interpolacji wielomianami algebraicznymi:**

W związku z faktem, że moja funkcja przyjmuje aż 13 ekstremów lokalnych w zadanej dziedzinie, w celu dobrego przybliżenia funkcji za pomocą wielomianu, potrzebny jest wielomian co najmniej 14 stopnia, aby mógł on również mieć 13 ekstremów.

**6.3 Funkcje sklejane**

Tabela 4 – wartości błędów przy interpolacji funkcjami sklejanymi 2 stopnia

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Liczba węzłów | warunek brzegowy  S(x1)’’ = 0 | | warunek brzegowy  S(x1)’’ = f1’ | |
| Maksymalny błąd bezwzględny | Suma kwadratów różnic | Maksymalny błąd bezwzględny | Suma kwadratów różnic |
| 2 | 68 | 2085 | 68 | 2085 |
| 3 | 151 | 10241 | 33 | 253 |
| 5 | 54 | 1019 | 19 | 103 |
| 10 | 29 | 176 | 20 | 101 |
| 15 | 138 | 3746 | 130 | 3136 |
| 20 | 5.28 | 6.64 | 8.45 | 11.93 |
| 25 | 1.33 | 0.5 | 4.3 | 5.5 |
| 30 | 0.89 | 0.16 | 2.82 | 2.86 |
| 50 | 0.426 | 0.074 | 0.975 | 0.452 |
| 100 | 0.137 | 0.0095 | 0.2405 | 0.0301 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Liczba węzłów | warunek brzegowy  S(x1)’’ = S(xn)’’ = 0 | | warunek brzegowy  S(x1)’ = f1’ oraz S(xn)’ = fn’ | |
| Maksymalny błąd bezwzględny | Suma kwadratów różnic | Maksymalny błąd bezwzględny | Suma kwadratów różnic |
| 3 | 19 | 96 | 62.3 | 804 |
| 5 | 18.9 | 96.9 | 23.2 | 115 |
| 10 | 19.8 | 95 | 19.8 | 94.2 |
| 15 | 5.9 | 2.5 | 13 | 6.99 |
| 20 | 4.4 | 2.4 | 3.5 | 1.6 |
| 25 | 2.4 | 0.3605 | 2.3 | 0.3484 |
| 30 | 1.47 | 0.0926 | 3.2 | 0.256 |
| 50 | 0.4308 | 0.004 | 2 | 0.0474 |
| 100 | 0.097 | 9.996e-05 | 0.582 | 0.0019 |

Tabela 5 – wartości błędów przy interpolacji funkcjami sklejanymi 3 stopnia

Po przeanalizowaniu tabeli 4 i 5 można dojść do wniosku, że funkcje sklejane 3 stopnia dają dokładniejsze przybliżenie funkcji. W przypadku zarówno funkcji sklejanych 2 stopnia, jak i 3 stopnia, dokładniejsze przybliżenia otrzymywane są przy zastosowaniu warunków brzegowych, gdzie druga pochodna funkcji jest równa 0.

Obraz zawierający tekst, Wykres, linia, diagram

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający Wykres, linia, diagram, tekst

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 7 – Interpolacja funkcjami sklejanymi 3 stopnia dla 3 węzłów

Rysunek 6 – Interpolacja funkcjami sklejanymi 2 stopnia dla 5 węzłów

Obraz zawierający tekst, Wykres, linia, diagram

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, Wykres, linia, diagram

Opis wygenerowany automatyczniePowyższe rysunki przedstawiają, jak wyglądają różnice w interpolacji funkcjami sklejanymi w zależności od doboru warunków brzegowych. Przy warunkach brzegowych, gdzie druga pochodna wynosi 0, interpolowana funkcja wygląda jakby była uśrednieniem wartości, natomiast dla pozostałych warunków występują spore odchylenia.

Rysunek 9 – Interpolacja funkcjami sklejanymi 3 stopnia dla 15 węzłów

Rysunek 8 – Interpolacja funkcjami sklejanymi 2 stopnia dla 15 węzłów

W przypadku funkcji sklejanych 2 stopnia występuje efekt oscylacji, który jest dobrze widoczny dla 15 węzłów. Pojawia się on dla obydwóch przyjętych warunków brzegowych. Dla funkcji sklejanych 3 stopnia, ten efekt się nie pojawia, ale otrzymywane jest już bardzo dobre przybliżenie, z wyjątkiem brzegów przedziału.

**Wnioski:**

* W interpolacji funkcjami sklejanymi zwiększanie liczby węzłów polepsza przybliżenie
* W obydwóch przypadkach, warunek brzegowy natural okazuje się dawać dokładniejsze przybliżenia
* Dla tej interpolacji nie występuje efekt Rungego, natomiast w przypadku funkcji sklejanych 2 stopnia pojawia się efekt oscylacji, które bezpośrednio wynikają z rozmieszczenia węzłów. Moja funkcja jest monotoniczna przedziałami, i tę samą wartość przyjmuje dla paru punktów. Gdy węzły umieszczone zostaną w taki sposób, że położone są one niemonotonicznie (w rozumieniu wartości na osi OY), to pojawia się właśnie ten efekt oscylacji.

**7. Porównanie aproksymacji**

**7.1 Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| L. węzłów →  -------------------  St. wielomianu  ↓ | 3 | 6 | 11 | 16 | 31 | 51 | 151 |
| 2 | 36.53 | 16.22 | 13.89 | 12.23 | 11.31 | 10.9 | 10.43 |
| 5 | - | 19.9 | 15.13 | 11.47 | 10.94 | 10.82 | 10.7 |
| 10 | - | - | 20.02 | 32.04 | 10.44 | 10.43 | 10.50 |
| 15 | - | - | - | 3322 | 14.57 | 11.38 | 11.32 |
| 30 | - | - | - | - | 5741 | 166 | 87 |
| 50 | - | - | - | - | - | 3998 | 15.39 |
| 150 | - | - | - | - | - | - | 1420 |

Tabela 6 – wartości maksymalnych błędów bezwzględnych aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| L. węzłów →  -------------------  St. wielomianu  ↓ | 3 | 6 | 11 | 16 | 31 | 51 | 151 |
| 2 | 517 | 75.36 | 56.2 | 51.58 | 50.47 | 50.19 | 50.04 |
| 5 | - | 104.96 | 60.6 | 50.94 | 50.08 | 49.83 | 49.64 |
| 10 | - | - | 104.59 | 107.58 | 43.92 | 43.35 | 42.63 |
| 15 | - | - | - | 505400 | 39.02 | 34.25 | 33.72 |
| 30 | - | - | - | - | 779169 | 286 | 242 |
| 50 | - | - | - | - | - | 125830 | 2.72 |
| 150 | - | - | - | - | - | - | 5592 |

Tabela 7 – wartości sumy kwadratów różnic aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi

Otrzymane wartości błędów zestawione w tabelach 6 i 7 sugerują, że zwiększanie liczby węzłów dla stałego stopnia wielomianu powoduje zwiększanie dokładności aproksymacji, natomiast zwiększanie stopnia dla stałej liczby węzłów niekoniecznie.

Obraz zawierający tekst, Wykres, diagram, linia

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający Wykres, diagram, linia, tekst

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, diagram, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, Wykres, diagram, linia

Opis wygenerowany automatycznieMoja funkcja jest symetryczna względem osi OY, a zatem aproksymacja również jest symetryczna. Na powyższych rysunkach 10 i 11 widać, że zwiększanie liczby węzłów polepsza aproksymacje, która w tym przypadku bardzo dobrze uśrednia wartości funkcji.

Rysunek 13 – Wykres aproksymacji dla 19 węzłów i 12 stopnia wielomianu

Rysunek 12 – Wykres aproksymacji dla 12 węzłów i 11 stopnia wielomianu

Rysunek 11 – Wykres aproksymacji dla 25 węzłów i 2 stopnia wielomianu

Rysunek 10 – Wykres aproksymacji dla 5 węzłów i 2 stopnia wielomianu

W przypadku zagadnienia aproksymacji również pojawia się efekt Rungego. Można pozbyć się go, zwiększając liczbę węzłów.

Obraz zawierający tekst, Wykres, diagram, linia

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, Wykres, zrzut ekranu, linia

Opis wygenerowany automatycznieKorzystając z aproksymacji można również dobrze przybliżać funkcję, jeśli zastosujemy odpowiednio duży stopień wielomianu i odpowiednio dużą liczbę węzłów. Trzeba jednak uważać, gdyż ze względu na złe uwarunkowanie macierzy, występują błędy numeryczne na krańcach przedziału, które są lekko widoczne na rysunku 14 na lewym krańcu przedziału, a na rysunku 15 są już bardzo duże wartości błędów na obydwóch granicach.

Rysunek 15 – Wykres aproksymacji dla 197 węzłów i 141 stopnia wielomianu

Rysunek 14 – Wykres aproksymacji dla 150 węzłów i 35 stopnia wielomianu

**7.2 Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami trygonometrycznymi**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| L. węzłów →  -------------------  St. wielomianu  ↓ | 5 | 9 | 15 | 21 | 31 | 51 | 61 |
| 2 | 46.64 | 32.17 | 19.34 | 17.97 | 18.16 | 20 | 20.47 |
| 4 | - | 51.02 | 28.74 | 23.47 | 19.49 | 16.37 | 15.60 |
| 7 | - | - | 38.65 | 25.07 | 16.99 | 13.03 | 12.36 |
| 10 | - | - | - | 50.6 | 33.34 | 19.6 | 16.2 |
| 15 | - | - | - | - | 53.3 | 31.63 | 26.22 |
| 25 | - | - | - | - | - | 55.49 | 46.12 |
| 30 | - | - | - | - | - | - | 56.07 |

Tabela 8 – wartości maksymalnych błędów bezwzględnych aproksymacji średniokwadratowej funkcjami trygonometrycznymi

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| L. węzłów →  -------------------  St. wielomianu  ↓ | 5 | 9 | 15 | 21 | 31 | 51 | 61 |
| 2 | 132892 | 34646 | 6857 | 4122 | 2508 | 1436 | 1187 |
| 4 | - | 54443 | 10091 | 4905 | 2478 | 1241 | 999 |
| 7 | - | - | 16851 | 7233 | 3159 | 1374 | 1070 |
| 10 | - | - | - | 7047 | 2132 | 470 | 274 |
| 15 | - | - | - | - | 3413 | 750 | 436 |
| 25 | - | - | - | - | - | 1331 | 773 |
| 30 | - | - | - | - | - | - | 947 |

Tabela 9 – wartości sumy kwadratów różnic aproksymacji średniokwadratowej funkcjami trygonometrycznymi

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, diagram, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatyczniePo spojrzeniu na powyższe tabele i porównaniu wyników, można dojść do takiego samego wniosku, jak w przypadku wielomianów algebraicznych: zwiększanie liczby węzłów zwiększa dokładność, a zwiększanie stopnia niekoniecznie. Wyniki z tabeli sugerują, że najlepszego przybliżenia funkcji będzie można oczekiwać dla wielomianu stopnia ~10, gdyż w tym wierszu znajdują się najmniejsze wartości błędów.

Rysunek 17 – Wykres aproksymacji dla 61 węzłów i 2 stopnia wielomianu

Rysunek 16 – Wykres aproksymacji dla 5 węzłów i 2 stopnia wielomianu

Obraz zawierający tekst, Wykres, diagram, linia

Opis wygenerowany automatycznieDla aproksymacji trygonometrycznej wnioski są identyczne jak dla aproksymacji wielomianami algebraicznymi - zwiększanie liczby węzłów polepsza aproksymacje, która dobrze uśrednia wartości funkcji.

Rysunek 19 – Wykres aproksymacji dla 31 węzłów i 15 stopnia wielomianu

Rysunek 18 – Wykres aproksymacji dla 31 węzłów i 7 stopnia wielomianu

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznieZwiększanie stopni wielomianu, choć polepszają przybliżenie „w środku” przedziału, tak na granicach powoduje spore odstępstwa od oryginalnych wartości. Płynie stąd wniosek, że zwiększanie stopni wielomianu niekoniecznie powoduje lepsze przybliżenie.

**Wnioski dla aproksymacji:**

* Dla obydwóch sposobów aproksymacji zwiększanie liczby węzłów powoduje zwiększanie jej dokładności, natomiast zwiększanie stopnia wielomianu niekoniecznie
* W przypadku zastosowania funkcji trygonometrycznych, użyte funkcje bazowe są ortogonalne, a więc błędy na granicach nie są aż takie duże jak w przypadku aproksymacji wielomianami algebraicznymi
* Przy porównaniu wartości błędów aproksymacji funkcjami trygonometrycznymi w zestawieniu z wartościami błędów aproksymacji wielomianami algebraicznymi, dojść można do wniosku, że aproksymacja funkcjami trygonometrycznymi na ogół pozwala uzyskiwać lepsze przybliżenia
* Z powodu równomiernie rozmieszczonych ekstremów lokalnych funkcji, które naprzemiennie są minimum i maksimum lokalnym, aproksymacja bardzo dobrze uśrednia funkcję, przyjmując wartości pomiędzy nimi.

**8. Podsumowanie**

* Ciężko jednoznacznie stwierdzić, który sposób przybliżania funkcji jest najlepszy. Wpływa na to wiele czynników, jak np. ilość informacji, którymi dysponujemy czy chęć uzyskania konkretnych wyników (np. aby przechodziła przez węzły). W przypadku mojej funkcji, najlepsze przybliżenie funkcji otrzymywane jest dla interpolacji metodą Lagrange’a z wykorzystaniem węzłów rozmieszczonych w zerach Czebyszewa
* Jeśli nie chcemy używać dużej liczby węzłów, najlepsze przybliżenie otrzymane jest wtedy z wykorzystaniem funkcji sklejanych 3 stopnia
* Jeśli funkcja spełnia warunki Dirichleta, to lepiej jest zastosować aproksymację funkcjami trygonometrycznymi niż wielomianami algebraicznymi